Ορισμός:
Έστω V ένας ερμιτιανός χώρος και $T: V \to V$ γραμμική απεικόνιση. Η γραμμική απεικόνιση $T^*: V \to V$ που ορίζεται από την σχέση $\langle T(\vec{a}), \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, T(\vec{b}) \rangle$ λέγεται προσαρτημένη της T (ή συζυγής της T)

Έστω $A = [T]_a^a$ όπου a ορθοκανονική βάση του V.
Τότε $A^* = [T^*]_a^a$

- Αν περιοριστώ σε Ευκλείδειο χώρο:
  Τότε $A^* = [T^t]_a^a$, αφού δεν υπάρχει συζυγής

Φροντ. Ασκήσεις #8.

Επαναληπτικό.

Άσκηση 2: Βρείτε τα $x, y \in \mathbb{C}$ ώστε ο $A = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & x \\ -\frac{4i}{5} & y \end{pmatrix}$ να είναι μοναδιαίος.

Πρέπει $A^* \cdot A = I_2$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3i}{5} & \frac{4i}{5} \\ \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & x \\ -\frac{4i}{5} & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9}{25} + \frac{16}{25} & -\frac{3i}{5}x + \frac{4i}{5}y \\ \frac{3i\bar{x}}{5} - \frac{4i\bar{y}}{5} & x \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &(1)\ x \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{y} = 1 \\ &-\frac{3i}{5}x + \frac{4i}{5}y = 0 \Rightarrow 4y = 3x \\ &\frac{3i}{5}\bar{x} - \frac{4i}{5} \cdot \bar{y} = 0 \Rightarrow 4\bar{y} = 3\bar{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

β' τρόπος:
- ξέρουμε ότι οι στήλες αποτελούν ΟΚΒ $\Rightarrow$ εσ. γινόμενο μηδέν κ' μήκος 1

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

$$\text{Η } (1): \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 = 1 \Rightarrow |x|^2 + \left|\frac{3}{4}x\right|^2 = 1 \Rightarrow |x|^2 + \frac{9}{16}|x|^2 = 1$$

$$\Rightarrow |x|^2 \left(1 + \frac{9}{16}\right) = 1 \Rightarrow |x|^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow |x| = \frac{4}{5}.$$

Άσκηση 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

Βρείτε:
ιδιοτιμές
μοναδιαίο πίνακα $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$
ώστε $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος

Ερμιτιανός $A^* = A$

Για τις ιδιοτιμές:

$$\chi_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & i \\ -i & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - (-i)^2 = (1-x)^2 - 1$$

$$= (1-x-1)(1-x+1) = -x(-x+2) = x\cdot(x-2)$$

$\Downarrow$ ιδιοτιμές 0, 2

Ιδιοχώροι:

- $V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1} \;\middle|\; (A - 0I)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

επομ.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 + i r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x + iy = 0 \\ x = -it \\ y = t, \; t \in \mathbb{C} \end{array}$$

$$\Rightarrow V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{-i(\overline{-i}) + 1\cdot\overline{1}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1-2 & i \\ -i & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Επαλήθευση $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 + i r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y = t \quad t \in \mathbb{C} \end{array}$

$\Rightarrow V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Άσκηση 2f

$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ιδιοτιμές, ιδιοχώρους, $m_A(x)$

$A^{593} - 2A^{15} + A = 0$

$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 4 & 3 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 5 & 2-x \end{pmatrix} = 0. \quad + (-x) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -2-x & 3 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} =$

$= -x\left[(-2-x)(2-x) + 3\right] = -x \cdot (x^2 - 4 + 3) = -x(x^2 - 1) =$

$= -x(x-1) \cdot (x+1) \rightsquigarrow$ ιδιοτιμές: $0, 1, -1$.

Ιδιοχώροι:

$V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-r_1 \leftrightarrow -r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} x - 5y - 2z = 0 \\ y + \frac{1}{6}z = 0 \\ z = t \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 5\left(-\frac{1}{6}t\right) + 2t \\ y = -\frac{1}{6}t \\ z = t \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{7}{6}t \\ y = -\frac{1}{6}t \\ z = t \end{array} \Rightarrow V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 7/6 \\ -1/6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2-1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

επαυξ. $\rightarrow \Big(\quad \dots \quad \Big) \Rightarrow V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

και $V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ξέρουμε ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος γιατί γεωμ.πολ. = αλγεβρική.

Για το $m_A(x)$.

Το $m_A(x) \mid \chi_A(x)$ και έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό.

Άρα $\Rightarrow m_A(x) = (x-0)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

αναγκαστικά $\Rightarrow m_A(x) = x\cdot(x^2-1) = x^3 - x$

$A^{593} - 2A^{15} + A = 0$

ξέρουμε ότι $m_A(A) = 0 \Rightarrow A^3 - A = \Phi_{3\times3} \Rightarrow A^3 = A$

$A^{2k+1} = A$ $\quad$ $A^4 = A^2$

$A^{2k} = A^2$ $\quad$ $A^5 = A^3 = A$

$A^{593} - 2A^{15} + A = A - 2A + A = 0$

↑ A σε περιττή δύναμη.

Άσκηση 19

$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος. $\quad x^t B x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^{3\times1} \ x \neq 0$

Από το κρ. Sylvester:

$4 > 0$

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ άρα από το κριτήριο Sylvester ο πίνακας B δεν είναι θετικά ορισμένος.

Άσκηση 13: Δείξτε ότι το γινόμενο δύο ορθογώνιων nxn πινάκων είναι ορθογώνιος.

A, B ορθογώνιοι

$A^t \cdot A = I_n$

$B^t \cdot B = I_n$

$\Rightarrow (AB)^t \cdot AB = B^t (A^t \cdot A) B = B^t \cdot I_n \cdot B = B^t B = I$

Άρα AB ορθογώνιος.

νδο

Ασκηση 25: Δύο όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο

- A, B όμοιοι $\Rightarrow$ $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, P αντιστρέψιμος.

$B = P^{-1} A P \Rightarrow A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ (1)

Θδο $m_A(x) = m_B(x)$.

το $m_A(x)$ είναι της μορφής:

- $m_A(x) = x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$

είναι πάντα μονικό.

ξέρουμε ότι $m_A(A) = \mathbb{O}_{n\times n}$

$\Rightarrow A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = \mathbb{O}_{n\times n}$

περνάω από τον A στον B

$\overset{(1)}{\Rightarrow} (P \cdot B \cdot P^{-1})^m + a_{m-1} \cdot (P \cdot B \cdot P^{-1})^{m-1} + \dots + a_1 \cdot P \cdot B \cdot P^{-1} + a_0 \cdot I = \mathbb{O}_{n\times n}$

$\Rightarrow \underbrace{(P B P^{-1})(P B P^{-1}) \dots (P B P^{-1})}_{m \text{ φορές}} + \dots = \mathbb{O}_{n\times n}$

$\Rightarrow P \cdot B^m \cdot P^{-1} + a_{m-1} \cdot P \cdot B^{m-1} \cdot P^{-1} + \dots + a_1 \cdot P \cdot B \cdot P^{-1} + a_0 \cdot P \cdot I \cdot P^{-1} = \mathbb{O}_{n\times n}$

$\Rightarrow P (B^m + a_{m-1} \cdot B^{m-1} + \dots + a_1 B + a_0 I_n) \cdot P^{-1} = \mathbb{O}_{n\times n}$

$\Rightarrow P^{-1} \cdot P \cdot (B^m + a_{m-1} B^{m-1} + \dots + a_1 B + a_0 I_n) \cdot P^{-1} \cdot P = P^{-1} \cdot \mathbb{O} \cdot P$

$\Rightarrow B^m + a_{m-1} B^{m-1} + \dots + a_1 B + a_0 I_n = \mathbb{O}_{n\times n}$

$\Rightarrow m_A(B) = \mathbb{O}$

$\Rightarrow$ Το $m_B(x) \mid m_A(x)$

Ομοια:

$m_A(x) \mid m_B(x)$

και επειδή και τα 2 πολυώνυμα είναι μονικά $\Rightarrow m_A(x) = m_B(x)$

Άσκηση 5: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i) $B = A^t \cdot A$ συμμετρικός

$\boxed{i}$ Θδο $B = B^t$

$$B^t = (A^t \cdot A)^t = A^t \cdot (A^t)^t = A^t \cdot A = B \Rightarrow B \text{ συμμετρικός}$$

και από το φασματικό θεώρημα είναι κ' διαγωνίσιμος.
(έχει όλες του τις ιδιοτιμές πραγματικές)

$\boxed{ii}$ Θδο ο B είναι μη αρνητικός

$x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ $\langle x, Bx \rangle = x^t \cdot B \cdot x = x^t \cdot A^t A x = (Ax)^t \cdot Ax = \langle Ax, Ax \rangle$
$= \|Ax\|^2 \geq 0.$

Άρα ο B είναι μη αρνητικός $\Rightarrow$ Οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές.

$\boxed{iii}$ "B θετικά ορισμένος αν κ' μόνο αν A αντιστρέψιμος"

"$\Rightarrow$" • B θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ ιδιοτιμές του B θετικές
[redacted] $\Rightarrow$ επειδή det B είναι γινόμενο των ιδιοτιμών
άρα διάφορη του μηδενός $\Rightarrow$ det B $\neq 0 \Rightarrow$ B αντιστρέψιμος

$\det B \neq 0$
$\Rightarrow \det(A^t \cdot A) \neq 0$
$\Rightarrow \det(A^t) \cdot \det A \neq 0$
$\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ A αντιστρέψιμος

"$\Leftarrow$" A αντιστρέψιμος $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \det A^t \neq 0$ (αφού $\det A = \det A^t$)
$\Rightarrow \det(A^t A) \neq 0 \Rightarrow \det B \neq 0 \Rightarrow$ B αντιστρ. και
το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του B.

Όμως όλες οι ιδιοτιμές του B είναι μη αρνητικές και $\neq 0$, άρα όλες οι ιδιοτιμές του B είναι θετικές
$\Rightarrow$ ο B είναι θετικά ορισμένος.

Ασκηση 6: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός
$A^m = O_{n\times n}$
$m>0$.

$\Rightarrow$ $\boxed{i}$ ΝΔΟ $A = O_{n\times n}$
$\boxed{ii}$

$\boxed{i}$

- A συμμετρικός $\Rightarrow$ Από το Φασματικό Θεώρημα
  A διαγωνίσιμος
  $\Downarrow$
  Το $m_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους. (1)

- $A^m = 0 \Rightarrow$ Ο Α μηδενίζει το πολυώνυμο $f(x) = x^m$
  $\Downarrow$
  Το $m_A(x) \mid x^m$
  $\Downarrow$
  $m_A(x) = x^s$ όπου $1 \leq s \leq m$.

Όμως από την (1) το $m_A(x)$ έχει μόνο απλές ρίζες $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ άρα αναγκαστικά $m_A(x) = x$.

- Τότε: $m_A(A) = O_{n\times n} \Rightarrow A = O_{n\times n}$

$\boxed{ii}$ Βρείτε $B \neq O_{2\times 2}$ τ.ω. $\begin{cases} B \in \mathbb{C}^{2\times 2} \\ B^t = B \end{cases}$ και $B^2 = O_{n\times n}$.

Εστω $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = B^t \Rightarrow y = z \Rightarrow B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix}$

- $B^2 = O_{n\times n} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy+yw \\ yx+yw & y^2+w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x^2+y^2=0$

$\Rightarrow xy+yw=0$ → αυτό έχει άπειρες λύσεις

$\Rightarrow xy+yw=0$ αλλά εμείς θέλουμε τουλ. 1

$\Rightarrow y^2+w^2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=0 \\ xy+yw=0 \\ y\cdot(x+w)=0 \Longleftrightarrow \text{ θέλω } \underline{w=-x}. \\ y^2+w^2=0 \end{cases}$$

Για $x=1$ και $y=-i$ $\Rightarrow$ $B=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \neq O_{n\times n}$ τ.ω $B=B^t$ και $B^2=O_{n\times n}$.

Άσκηση 11

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

α) ΝΔΟ 3 ιδιοτιμή του A $\Rightarrow$ 15 ιδιοτιμή του $2A^2-3I_n$

β)

$\boxed{\alpha}$ 3 ιδιοτιμή του $A \Rightarrow$ (Ορισμός!) $\exists\ X\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, $X\neq O_{n\times n}$ τ.ω $A\cdot X=\lambda X=3X$.

$$\begin{aligned} \bullet\ (2A^2-3I_n)\cdot X &= 2A^2X-3I_n\cdot X \\ &= 2A^2X-3X \\ &= 2A^2X-AX \\ &= 2\cdot A\cdot A\cdot X-AX \\ &= 2A\cdot(3X)-3X \\ &= 6AX-AX \\ &= 6\cdot(3X)-(3X) \\ &= 18X-3X=\underline{15X}. \end{aligned}$$

$X\neq 0 \Rightarrow$ 15 ιδιοτιμή του $2A^2-3I_n$

ii

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$A^2 = 4I$, m_A? χ_A?

$A^2 - 4I = 0_{n\times n}$

$\Rightarrow$ Ο A μηδενίζει το πολυώνυμο x^2-4.

$\Downarrow$

Το $m_A(x)$ διαιρεί το x^2-4

διαιρεί το $\Rightarrow (x-2)(x+2)$.

δηλ $m_A(x) \mid (x-2)(x+2) \Rightarrow m_A(x) \in \{(x-2), (x+2), (x-2)\cdot(x+2), \cancel{1}\}$

απορ. γιατί το 1 δεν μηδενίζει κανένα πολυώνυμο

1η περ: $m_A(x) = x-2$

2η περ: $m_A(x) = x+2$

3η περ: $m_A(x) = (x-2)(x+2)$

και στις 3 περιπτώσεις το $m_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους $\Rightarrow$ A διαγωνίσιμος.

Για το $\chi_A(x)$:

1η περ: $m_A(x) = x-2 \Rightarrow m_A(A) = 0_{n\times n}$

$\Rightarrow A - 2I_n = 0$

$\Rightarrow A = 2I_n$

Τότε $\chi_A(x) = (-1)^n (x-2)^n$ γιατί

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^n = (-1)^n (x-2)^n$$

2η περ: $m_A(x) = x+2 \Rightarrow m_A(A) = 0$
$\Rightarrow A = -2I_n$

$\Rightarrow \chi_A(x) = (-1)^n \cdot (x+2)^n$

3η περ: $m_A(x) = (x-2)(x+2)$

$\chi_A(x) = (-1)^n \cdot (x-2)^k \cdot (x+2)^\lambda$

$k+\lambda = n$

με $k \geq 1$
$\lambda \geq 1$